LABĀS PRAKSES PIEMĒRS

Ineta Ivanova

Dabaszinātņu maģistra grāds matemātikā

Preiļu Valsts ģimnāzijas matemātikas skolotāja

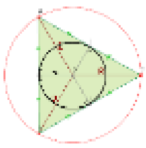
Zināšanas un radošums matemātikā

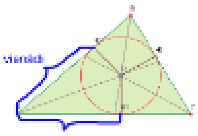
Apgūstot jaunu mācību tēmu matemātikā, skolēnam ir jāiepazīst jauni jēdzieni, jāatceras, jāizprot daudzas formulas, fakti. Bieži vien grūti atcerēties to, kas ir jāzina. Skolēniem ir jāpierod mācīties radoši. Jāatrod sev piemērots veids, kā apgūto vielu neaizmirst vai atrast formulu lapā. Mērķa sasniegšanai katrs var veidot savu tēmas konspektu, kurā jāatspoguļo visi fakti, atziņas, kas nepieciešamas, lai veiksmīgi varētu risināt atbilstošus uzdevumus.

Ja skolēns pats kādu iemeslu dēļ nespēj izveidot konspektu, tad skolotājs to var sagatavot un piedāvāt skolēnam. Piedāvātais konspekts var būt pilnībā pabeigts vai arī tāds, kuram nepieciešami papildinājumi, kurus katrs individuāli var veikt.

1.Piemērs. Zināšanu konspekts par trijstūriem (skolēnam ir jāpapildina):

TRIJSTŪRI

DAŽĀDMALU	REGULĀRS	TAISNLEŅĶA
$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot h_a$	$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot h_c$
$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin\gamma$	$R=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{3}$	$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\beta$
$S=\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$	$r=\frac{a\cdot\sqrt{3}}{6}$	$R=\frac{a}{2\cdot\sin\alpha}$
$R=\frac{a\cdot b\cdot c}{4\cdot S}$	$R=2\cdot r$	$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$
$R=\frac{a}{2\cdot\sin\alpha}$		$R=\frac{c}{2}$
$r=\frac{S}{p}$		$r=\frac{a+b-c}{2}$
$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$		Trigonometriskās sakarības
$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha$		Pitagora teorēma



Mediānas krustpunktā dalās 2:1

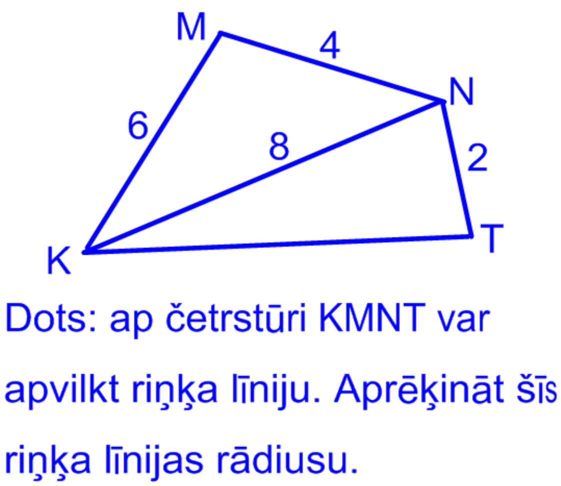
Bisektrises īpašība

Apvilktas riņķa līnijas centrs atrodas malu viduspersendikulu krustpunktā

Ievilktas riņķa līnijas cents atrodas bisektrišu krustpunktā

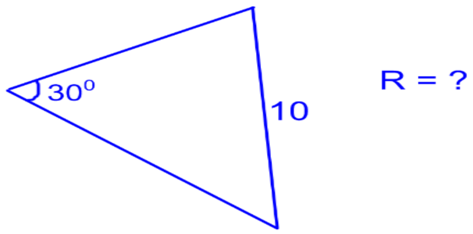
Lai atcerētos laukuma formulas, var ievērot, ka dažādmalu un taisnleņķa trijstūriem katram ir trīs iespējas, kā dažādi aprēķināt laukumu. Tātad, kad skolēns izvērtē, kuru laukuma formulu lietot, viņš atceras, ka tādas ir trīs (ja kāda piemirstas, tad to var sameklēt formulu lapā), visas analizē un izvēlas racionālāko.

1. uzdevums.



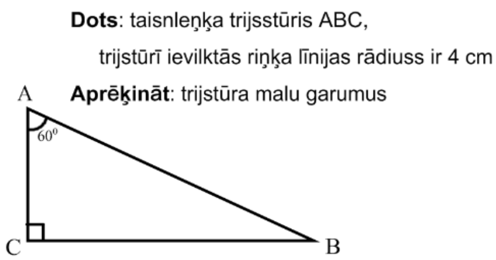
Risinot šo uzdevumu, skolēns var izmantot tās formulas, kuras jāzina planimetrijā. Viņš zina, ka nav formulas, kas ļautu uzreiz aprēķināt ap četrstūri KMNT apvilktās riņķa līnijas rādiusu. Tātad domās jāpāriet cauri planimetrijas formulām un radoši tās jāizmanto. Formula $R = \frac{abc}{4S}$ un radošums ļauj tikt galā ar uzdevumu. Nezinot formulu praktiski nav iespējams atrisināt šo uzdevumu.

2. uzdevums.



Zinot teoriju, šo uzdevumu var atrisināt ļoti ātri (izmanto formulu $R = a/2sin\alpha)$. Formulas nezināšana uzdevuma atrisināšanu padara par neiespējamu.

3. uzdevums.

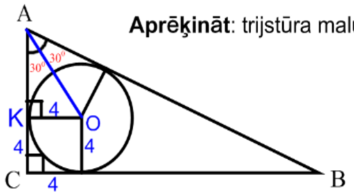


Zinot teoriju, skolēns izmantos zināšanas, kuras parādīs zīmējumā:

Dots: taisnleņķa trijsstūris ABC,

trijstūrī ievilktās riņķa līnijas rādiuss ir 4 cm

Aprēķināt: trijstūra malu garumus



Lai aprēķinātu nogriežņa AK garumu , jāzina ka tas jāiesaista trijstūrī. Vislabāk taisnleņķa trijstūrī AKO. Tā kā zinām malas KO garumu un leņķa A lielumu, izmantojot trigonometriskās sakarības, varam aprēķināt $AK = 4\sqrt{3}$ cm. Tātad $AC = 4 + 4\sqrt{3}$.

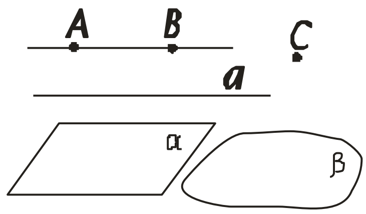
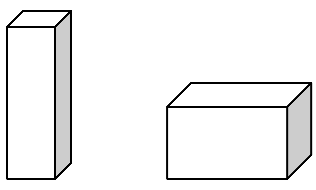
2.Piemērs. Algoritms šķēlumu konstruēšanai ar plakni:

Algoritms

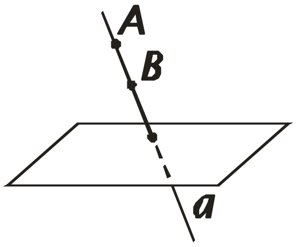
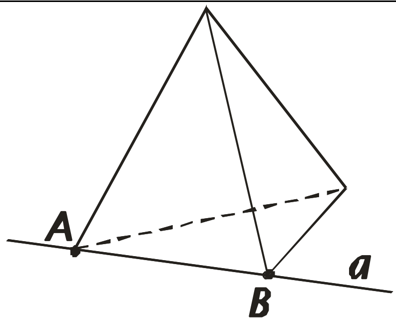
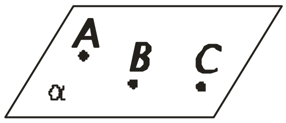
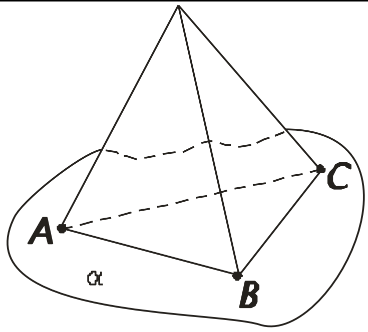
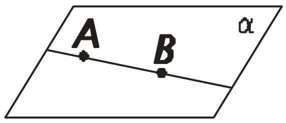
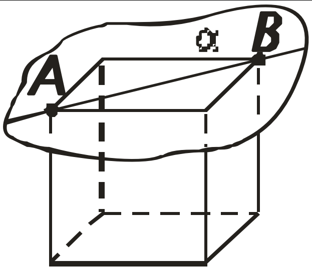
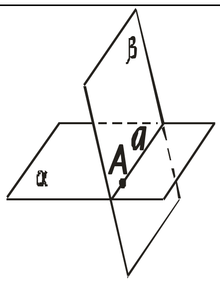
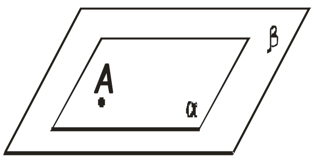
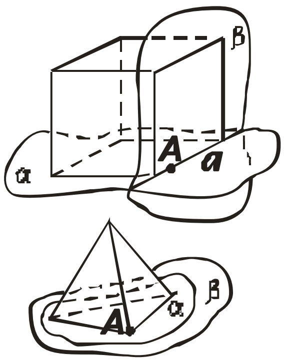
(*Par krāsainajiem punktiem nosauksim punktus, kuri pieder šķēlējplaknei.)*

- ***Savieno divus krāsainus punktus, kuri pieder daudzskaldņa vienai skaldnei***
- ***Ja daudzskaldnī ir divas paralēlas skaldnes un vienā no tām doti divi krāsaini punkti (krāsains nogrieznis), bet otrā viens krāsains punkts, tad caur šo vienu krāsaino punktu velkam taisni, kas paralēla krāsainajam nogrieznim. Atzīmējam ar krāsainiem punktiem novilktās taisnes un atbilstošo šķautņu krustpunktus. Atgriežamies uz algoritma sākumu***
- ***Caur vienas skaldnes diviem krāsainiem punktiem velkam vienu taisni, bet caur šis pašas skaldnes šķautni velkam otru taisni. Abu taišņu krustpunktu apzīmējam ar krāsainu punktu. Atgriežamies uz algoritma sākumu***

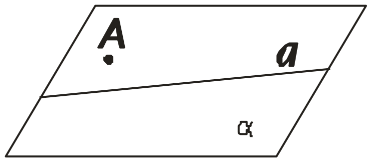
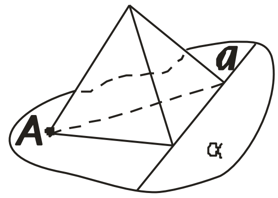
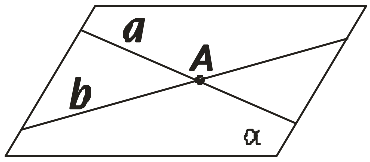
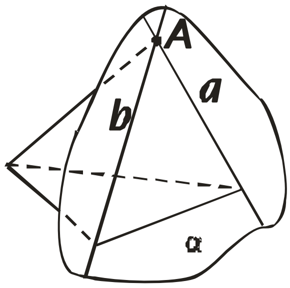
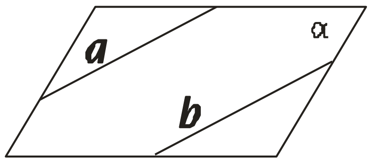
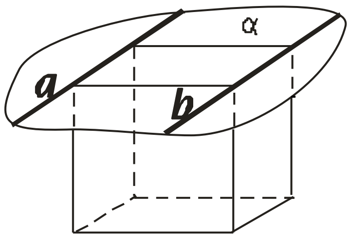
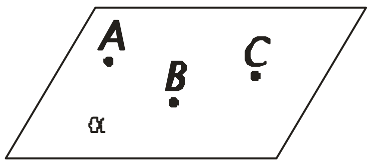
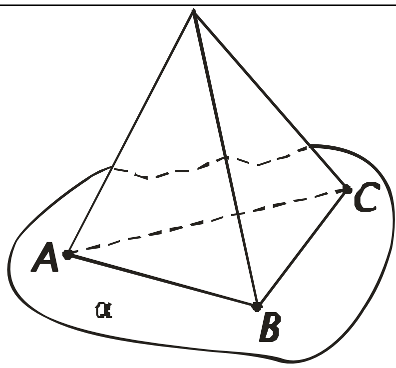
<u>3.Piemērs</u>. **Ievads stereometrijā**

Jēdziens.	Paskaidrojums.	Piemērs.
Stereometrijas pamatjēdzieni (pieņem bez definēšanas)	Punkts, taisne, plakne	
Figūra	Jebkura punktu kopa ģeometrijā.	Paralelograms, kubs, lode, trijstūris.
Telpa	Visu stereometrijā aplūkojamo punktu kopa.	
Telpiska figūra	Figūra, kuras visi punkti neatrodas vienā plaknē.	Spirālveida līnija, kubs.
Ģeometrisks ķermenis	Norobežota telpas daļa.	Lode, piramīda.
Ģeometriska ķermeņa virsma	Punktu kopa, kas norobežo ģeometrisko ķermeni no apkārtējās telpas.	Sfēra.
Vienlieli ķermeņi	Ķermeņi, kuru tilpumi ir vienādi.	 $V_1 = V_2$
Vienādi ķermeņi	Tos var pārvietot tā, ka tie pilnīgi sakrīt.	

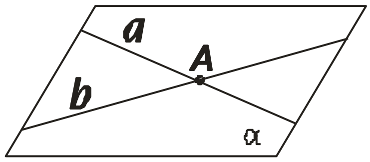
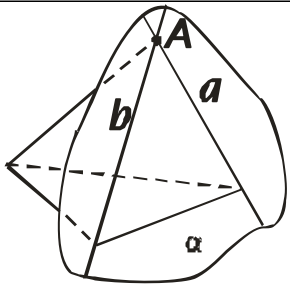
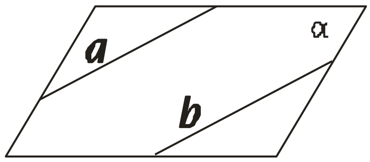
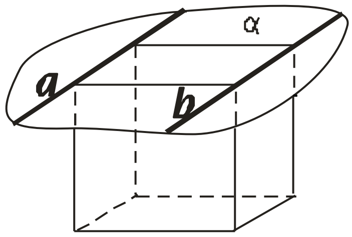
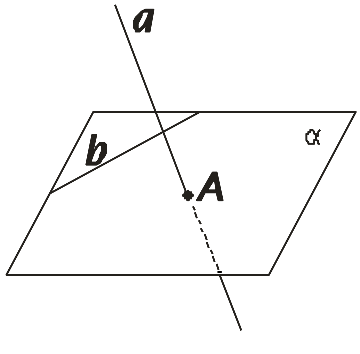
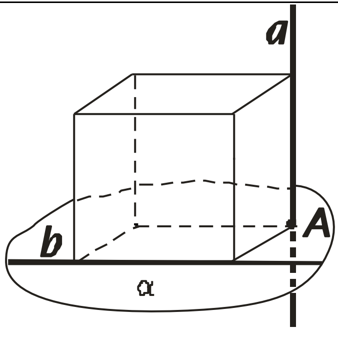
Stereometrijas pamataksiomas

Aksioma.	Zīmējums.	Piemērs.
<u>A1.</u> Caur jebkuriem diviem telpas punktiem var novilkt vienu vienīgu taisni.		 $A \in a, B \in a$
<u>A2.</u> Caur trim punktiem, kas neatrodas uz vienas taisnes, var novilkt vienu un tikai vienu plakni.		 $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$
<u>A3.</u> Taisne, kas novilkta caur diviem dažādiem plaknes punktiem, atrodas šajā plaknē.		 $A \in \alpha, B \in \alpha, AB \in \alpha$
<u>A4.</u> Ja divām dažādām plaknēm ir kopīgs punkts, tad šo plakņu šķēlums ir taisne, kas iet caur šo punktu vai arī plaknes sakrīt.	 	$A \in \alpha, A \in \beta \Rightarrow$  $\alpha \cap \beta = a, A \in a; vai, \alpha = \beta$

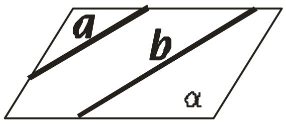
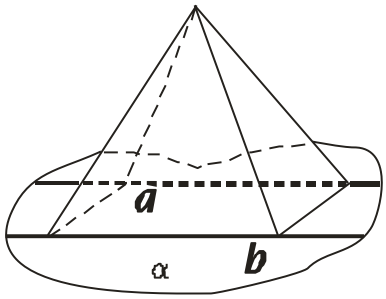
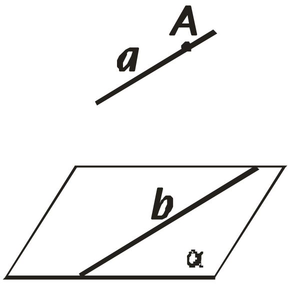
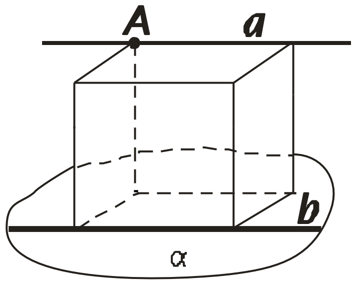
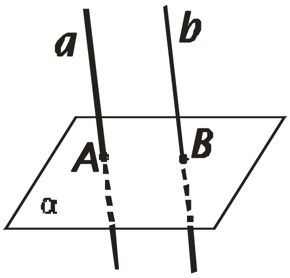
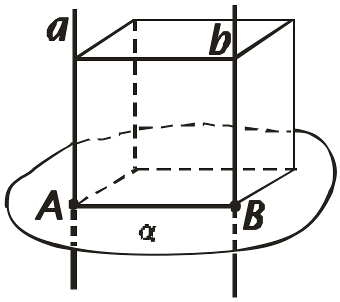
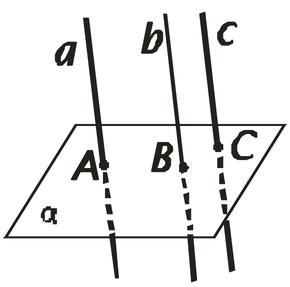
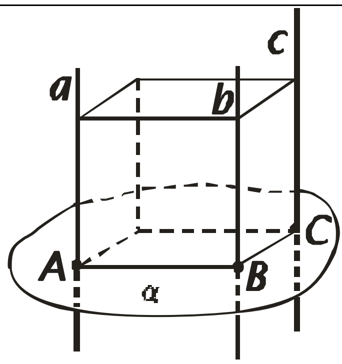
Secinājumi no aksiomām

Teorēma..	Zīmējums.	Piemērs.
Caur taisni a un punktu A, kas neatrodas uz tās, var novilkt vienu vienīgu plakni α.		 $A \notin a, A \in \alpha, a \in \alpha$
Caur divām krustiskām taisnēm a un b var novilkt vienu vienīgu plakni α.		 $a \in \alpha$, $b \in \alpha$ $a \cap b = A$
Caur divām dažādām paralēlām taisnēm a un b var novilkt vienu vienīgu plakni α.		 $a \in \alpha$, $b \in \alpha$, a ‖ b
Jebkuri trīs punkti, kas neatrodas uz vienas taisnes, viennozīmīgi nosaka plakni.		 $A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$

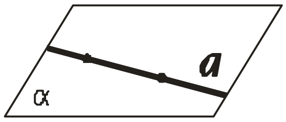
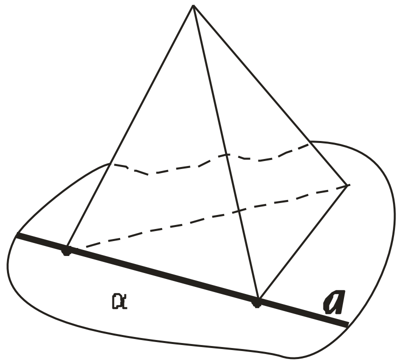
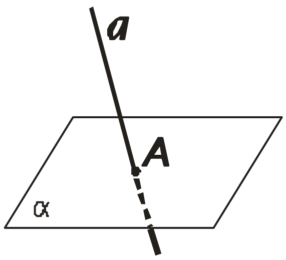
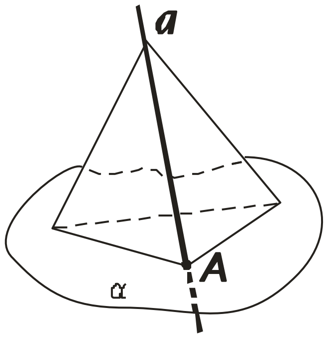
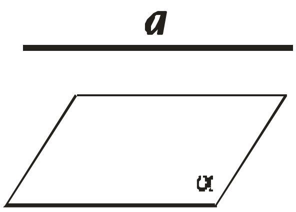
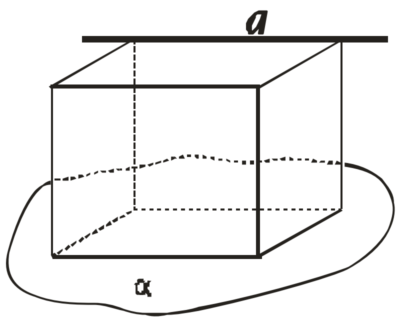
Taišņu savstarpējais novietojums telpā

Krustiskas taisnes (viens kopīgs punkts)		 $a \cap b = A$
Paralēlas taisnes (nav kopīgu punktu un atrodas vienā plaknē; jebkura taisne ir paralēla pati sev)		 $a \parallel b$
Šķērsas taisnes (nav kopīgu punktu un neatrodas vienā plaknē)		 $a \cap b$

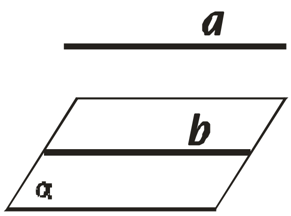
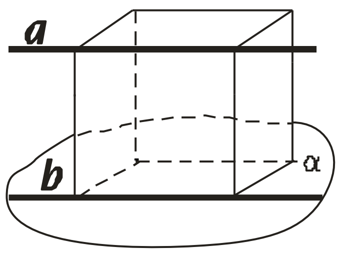
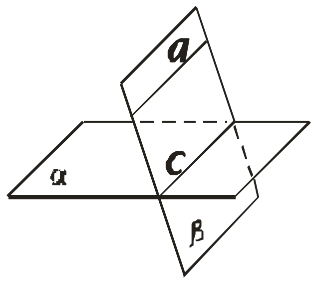
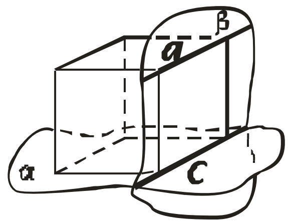
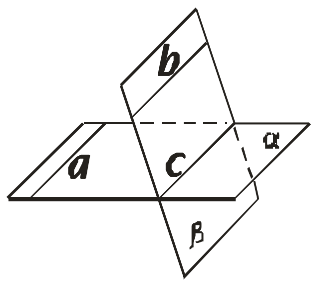
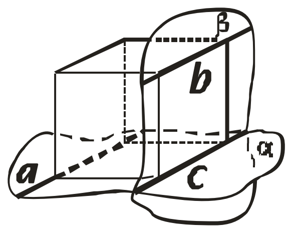
Taišņu paralelitāte

Caur divām paralēlām taisnēm var novilkt vienu vienīgu plakni.		 $a // b, a \in \alpha, b \in \alpha$
Telpā caur punktu A ārpus taisnes b var novilkt vienu vienīgu taisni a, kas paralēla dotajai.		 $b \in \alpha, a \notin \alpha, A \notin b, a // b, A \notin \alpha$
Ja viena no divām paralēlām taisnēm a krusto plakni α, tad arī otra taisne b krusto šo plakni.		 $a // b, a \cap \alpha \Rightarrow b \cap \alpha$
Ja katra no divām taisnēm a un b ir paralēla trešajai taisnei c, tad tās abas ir savstarpēji paralēlas.		 $a // c, b // c \Rightarrow a // b$

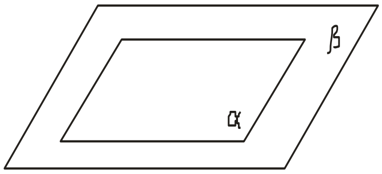
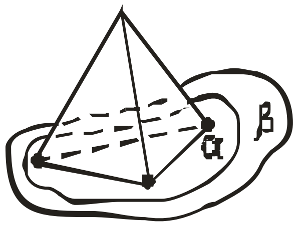
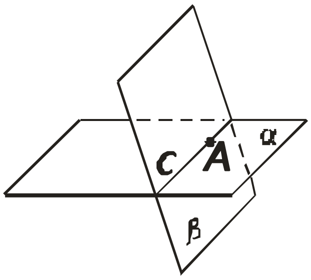
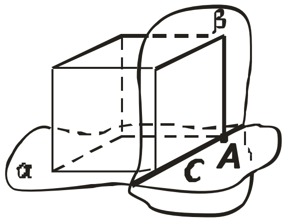
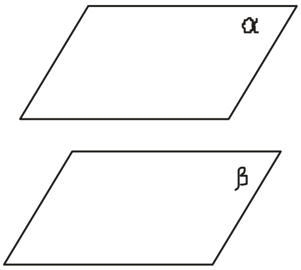
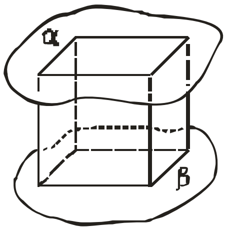
Taisnes un plaknes savstarpējais novietojums telpā

Taisne a **atrodas plaknē α** (taisnei un plaknei ir vismaz divi kopīgi punkti).		 $a \in \alpha$
Taisne a **krusto plakni α punktā A** (taisnei un plaknei ir viens kopīgs punkts).		 $a \cap \alpha = A$
Taisne a **ir paralēla plaknei α** (taisnei un plaknei nav kopīgu punktu; uzskata, ka jebkura taisne, kas atrodas plaknē, ir arī šai plaknei paralēla).		 a‖α

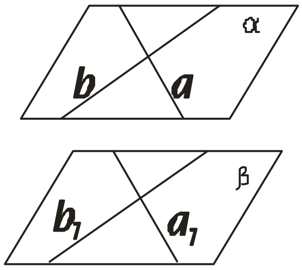
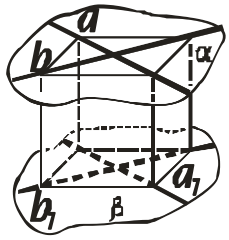
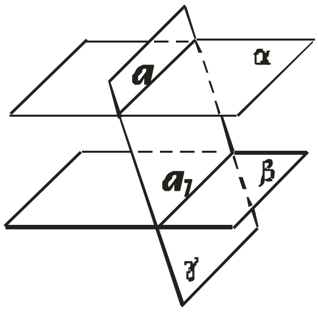
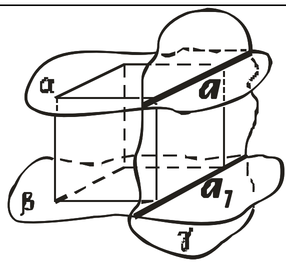
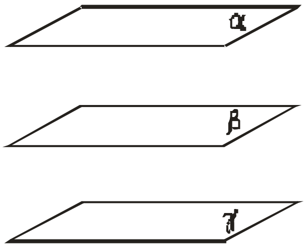
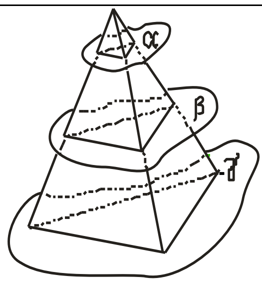
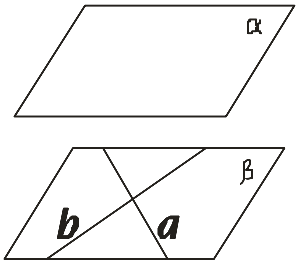
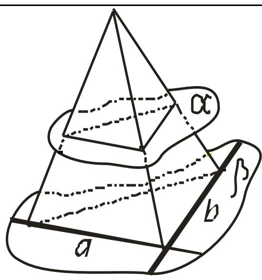
Taisnes un plaknes paralelitātes nosacījumi

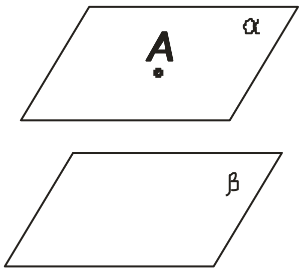
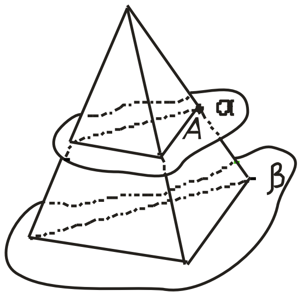
(**taisnes un plaknes paralelitātes pazīme)** Ja taisne a, kas neatrodas plaknē α, ir paralēla kādai šīs plaknes taisnei b, tad tā ir paralēla pašai plaknei α.		 $a // b, b \in \alpha \Rightarrow a // \alpha$
Ja caur taisni a, kas ir paralēla plaknei α, novilkta plakne β, kas šķeļ α, tad šķēluma līnija c ir paralēla taisnei a.		 $a // \alpha, a \in \beta, \alpha \cap \beta = c$ $\Rightarrow c // a$
Ja caur divām paralēlām taisnēm a un b ir novilktas plaknes α un β, kuras šķeļas, tad šķēluma līnija c ir paralēla šīm taisnēm.		 $a // b, a \in \alpha, b \in \beta$ $\alpha \cap \beta = c \Rightarrow c // a, c // b$

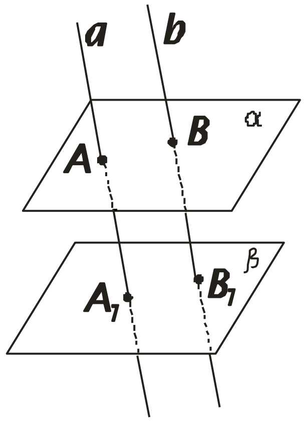
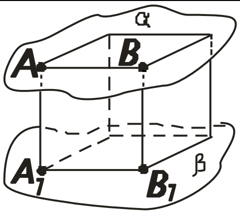
Divu plakņu savstarpējais stāvoklis telpā

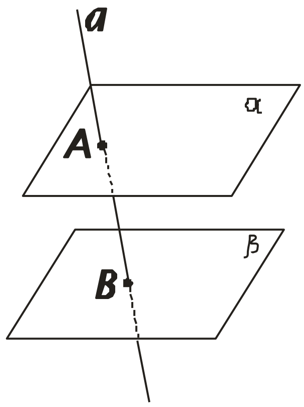
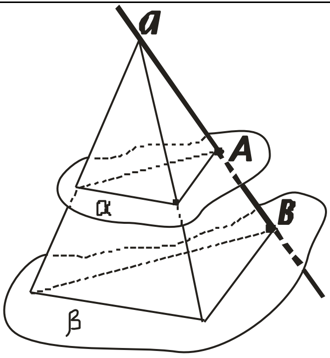
Plaknes sakrīt (tām ir vismaz trīs kopēji punkti, kas neatrodas uz vienas taisnes).		 $\alpha = \beta$
Plaknes šķeļas (tām ir vismaz viens kopīgs punkts).		 $\alpha \cap \beta = c$
Plaknes ir paralēlas (tām nav kopīgu punktu; uzskata, ka jebkura plakne ir paralēla pati sev).		 $\alpha \parallel \beta$

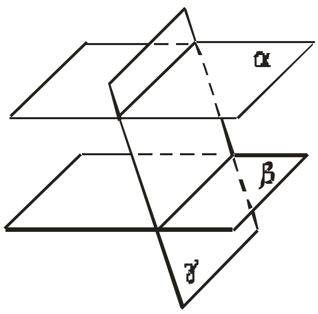
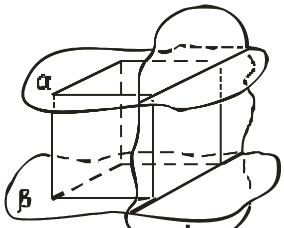
Divu plakņu paralelitātes nosacījumi

(plakņu paralelitātes pazīme) Ja vienas plaknes α divas krustiskas taisnes a un b ir attiecīgi paralēlas ar otras plaknes β divām krustiskām taisnēm a_1 un b_1, tad šīs plaknes ir paralēlas.		 $a \in \alpha, b \in \alpha, a \cap b$ $a_1 \in \alpha, b_1 \in \alpha, a_1 \cap b_1 \;\Rightarrow\; \alpha // \beta$
Ja divas paralēlas plaknes α un β šķeļ trešā plakne γ, tad šķēluma taisnes a un a_1 ir savstarpēji paralēlas.		 $\alpha // \beta, \alpha \cap \gamma = a, \beta \cap \gamma = a_1$ $\Rightarrow a // a_1$
Ja katra no divām plaknēm α un β ir paralēlas ar trešo plakni γ, tad plaknes α un β ir paralēlas savā starpā.		 $\alpha // \gamma, \beta // \gamma \Rightarrow \alpha // \beta$
Divas plaknes α un β ir savstarpēji paralēlas, ja viena no tām α ir paralēla katrai no divām krustiskām taisnēm a un b, kas atrodas otrā plaknē β.		 $a \cap b, a \in \beta, b \in \beta, a // \alpha, b // \alpha$ $\Rightarrow a // \beta$

<table>
<tr>
<td>Caur punktu A, kas neatrodas plaknē β, var novilkt vienu vienīgu plakni α, kas paralēla dotajai β.</td>
<td>
</td>
<td>

$A \notin \beta \Rightarrow A \in \alpha, \alpha \,//\, \beta$</td>
</tr>
<tr>
<td>Paralēlu taišņu a un b nogriežņi, kas atrodas starp paralēlām plaknēm α un β, ir vienādi $\left(AA_1 = BB_1\right)$</td>
<td>
</td>
<td>

$\alpha \,//\, \beta, AA_1 \,//\, BB_1 \Rightarrow$
$AA_1 = BB_1$</td>
</tr>
<tr>
<td>Ja kāda taisne a krusto vienu no paralēlām plaknēm α, tad tā krusto arī otru plakni β.</td>
<td>
</td>
<td>

$\alpha \,//\, \beta, a \cap \alpha = A \Rightarrow a \cap \beta = B$</td>
</tr>
<tr>
<td>Ja kāda plakne γ šķeļ vienu no paralēlām plaknēm α, tad tā šķeļ arī otru plakni β.</td>
<td>
</td>
<td>

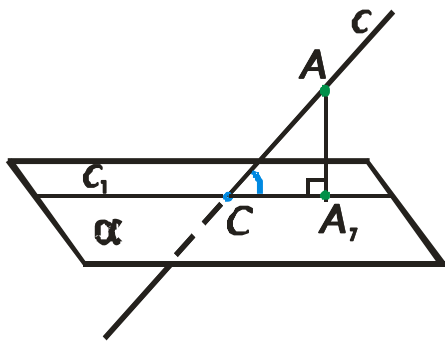
$\alpha \,//\, \beta, \alpha \cap \gamma \Rightarrow \beta \cap \gamma$</td>
</tr>
</table>

4.Piemērs.

Leņķis starp taisni un plakni

Definīcija. Par leņķi starp taisni un plakni sauc leņķi starp taisni un tās projekciju plaknē.

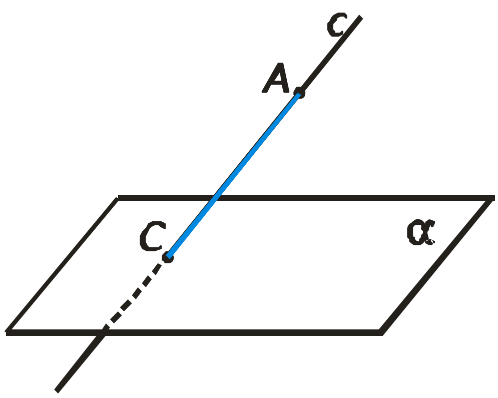
$\angle(c;\alpha) = \angle(c;c_1) = \angle ACA_1$ (1.zīm.)



1. zīm.

Tātad, lai atrastu leņķi starp taisni c un plakni α, ir jāprot konstruēt taisnes projekciju plaknē. Kā to izdarīt?

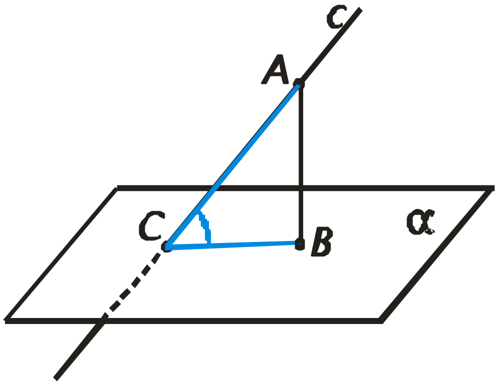
Uz taisnes c izvēlamies punktu A un atrodam $c \cap \alpha = C$. Iegūstam slīpni AC (2. zīm.).



2. zīm.

Leņķis starp taisni c un plakni α ir vienāds ar leņķi starp slīpni AC un plakni α.

Lai atrastu slīpnes AC projekciju plaknē α, no punkta A pret plakni α jāvelk perpendikuls AB, kura pamats ir punkts B. Tad slīpnes AC projekcija ir nogrieznis BC un < (c;α) = < ACB (3. zīm.).



3. zīm.

Metode.

1. ***Atrod taisnes c un plaknes α krustpunktu C (slīpnes pamats). Uz taisnes c izvēlas punktu A (tādu no kura pret plakni α var novilkt perpendikulu). Iegūst slīpni AC.***
2. ***Atrod slīpnes AC projekciju: no punkta A pret plakni α velk perpendikulu un atrod tā pamatu B. Tad BC – projekcija.***
3. ***< (c;α) = < ACB (3. zīm.).***

Piemēri:

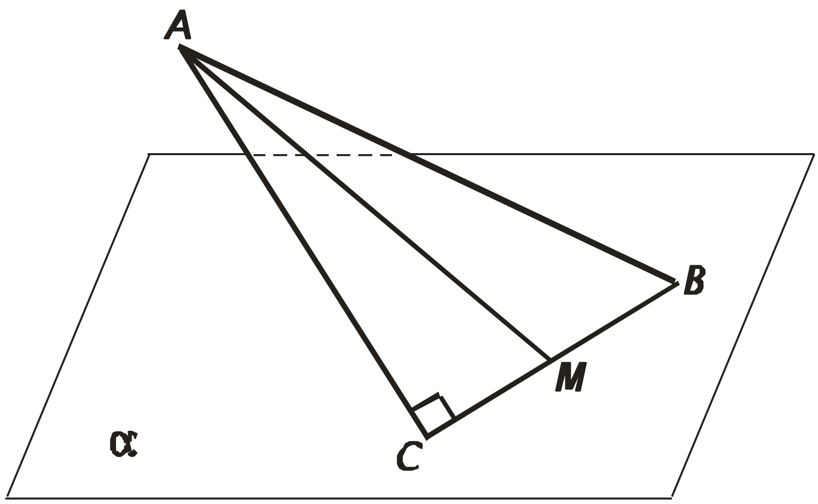
1. Dots: caur taisnleņķa trijstūra ABC kateti BC novilkta plakne tā, ka katete AC ar plakni veido 60^0 leņķi. AC=3 cm, BC=4 cm (4. zīm.).

Aprēķināt: leņķus, kurus ar pamata plakni veido trijstūra ABC hipotenūza AB un mediāna AM.

Risinājums:

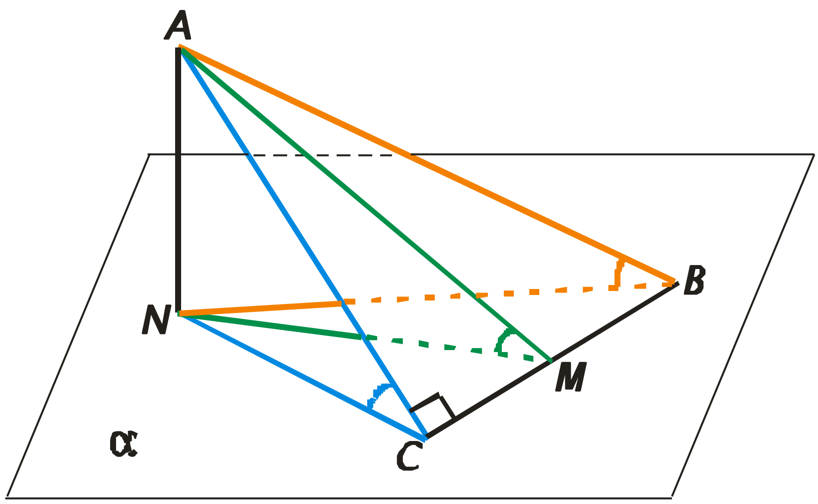
1. Slīpņu AC, AM un AB krustpunkti ar plakni α ir C, M, B (slīpņu pamati) (4.zīm).

2. No punkta A pret plakni α velk perpendikulu un atrod tā pamatu N. Tad slīpnes AC projekcija ir NC, slīpnes AM – NM, slīpnes AB – NB (5. zīm.).



4. zīm.

3. <(AC, α) = <ACN, <(AM, α) = <AMN, <(AB, α) = <ABN (5. zīm.).



5. zīm.

Lai aprēķinātu <AMN, „iesaistīsim" (saskatīsim trijstūri, kurš satur leņķi AMN) to taisnleņķa trijstūrī AMN. Vispirms aprēķināsim šī leņķa sinusu, kosinusu vai tangensu, tāpēc jāzina trijstūra AMN divas malas.

Taisnleņķa trijstūrī ACN hipotenūza AC = 3 cm, <ACN = 60^0. Iegūstam, ka AN = $\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$ cm.

No taisnleņķa trijstūra ACM (AC=3, CM=2), pēc Pitagora teorēmas iegūstam, ka AM = $\sqrt{13}$ cm.

Tad trijstūrī AMN $\sin < AMN = \frac{AN}{AM} = \frac{\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{13}} = \frac{3\cdot\sqrt{39}}{26}$ un $< AMN = \arcsin\frac{3\cdot\sqrt{39}}{26}$.

Lai aprēķinātu <ABN, „iesaistīsim” to taisnleņķa trijstūrī ABN. Vispirms aprēķināsim šī leņķa sinusu, kosinusu vai tangensu, tāpēc jāzina trijstūra ABN divas malas.

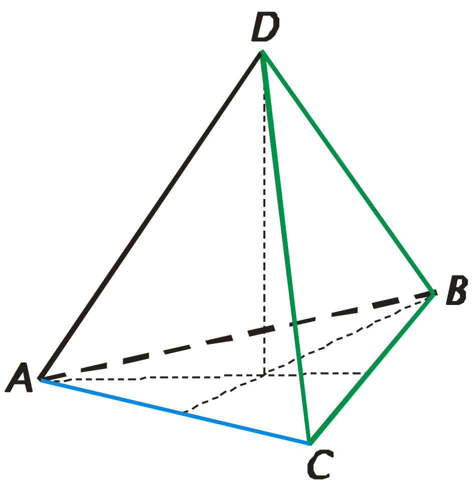
Taisnleņķa trijstūrī ABC pēc Pitagora teorēmas aprēķinām AB = 5 cm. Tad trijstūrī ABN $\sin < ABN = \frac{AN}{AB} = \frac{\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}}{5} = \frac{3\cdot\sqrt{3}}{10}$ un $< ABN = \arcsin\frac{3\cdot\sqrt{3}}{10}$ (5.zīm.)

<u>GRŪTĀKS UZDEVUMS</u> **Dots:** regulārs tetraedrs DABC.

Konstruēt: leņķi ko veido pamata šķautne ar sānu skaldni.

Konstrukcijas gaita:

Zīmējot regulāru tetraedru, jāņem vērā, ka tā virsotnes projekcija atrodas pamata trijstūra mediānu krustpunktā (6. zīm.).

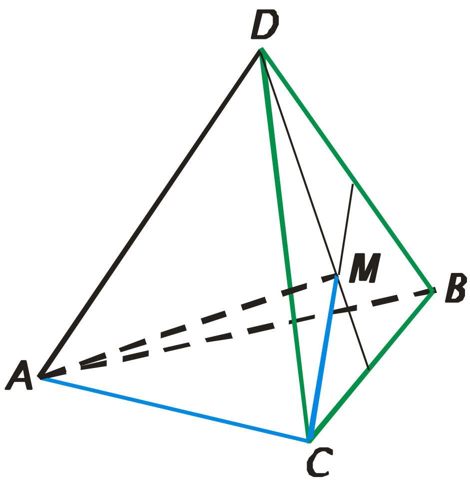


6. zīm.

Konstruēsim leņķi starp pamata šķautni AC un sānu skaldni BCD (6.zīm.).

1. Slīpnes AC pamats ir punkts C. Slīpne AC.

2. Atrod slīpnes AC projekciju plaknē BCD: no punkta A pret plakni jāvelk perpendikuls. Tā kā AC = AB = AD, tad punkta A projekcija plaknē BCD ir trijstūrim BCD apvilktās riņķa līnijas centrs, kas šajā gadījumā ir arī mediānu krustpunkts M. Tad MC ir slīpnes AC projekcija plaknē BCD (7.zīm.).



7. zīm.

5.Piemērs.

Leņķis starp plaknēm

1. Metode.

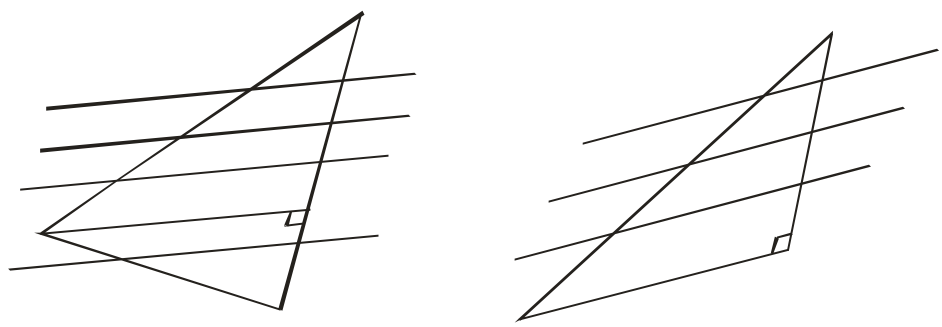
1. ***Atrod plakņu šķēluma taisni.***
2. ***Uz šīs taisnes izvēlas punktu, no kura abās plaknēs var novilkt perpendikulus.***

Divplakņu kakta leņķi var atlikt no jebkura punkta uz šķēluma taisnes, bet mēs izvēlēsimies tādu punktu, no kura to izdarīt ir visvieglāk vai arī, kas atvieglotu uzdevuma risināšanu.

Bieži vien šis punkts ir :

1) kāda daudzstūra augstums, kuru var precīzi iezīmēt (vienādsānu trijstūrī augstums pret pamatu ir mediāna – mediānu konstruēt protam; vienādmalu trijstūrī augstumi ir mediānas; vienādsānu trapecē augstumu var konstruēt savienojot pamatu viduspunktus).

2) ja pret kopīgā šķēluma taisni jau ir iezīmēts perpendikuls, tad visas taisnes, kuras paralēlas tam, būs perpendikulāras pret šķēluma taisni.(8. zīm.)

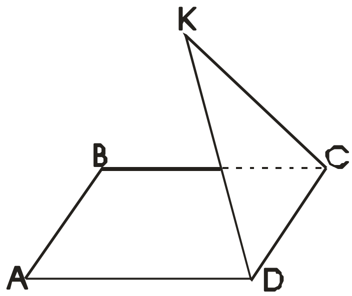


8. zīm.

3. ***Leņķis starp perpendikuliem ir meklētais leņķis.***

Aplūkosim piemēru, kurā plaknes figūrām, starp kurām nosaka divplakņu kakta leņķi, ir zināma forma.

Piemērs: 1. Dots: ABCD – kvadrāts, DCK – trijstūris, KD=KC (9.zīm.).

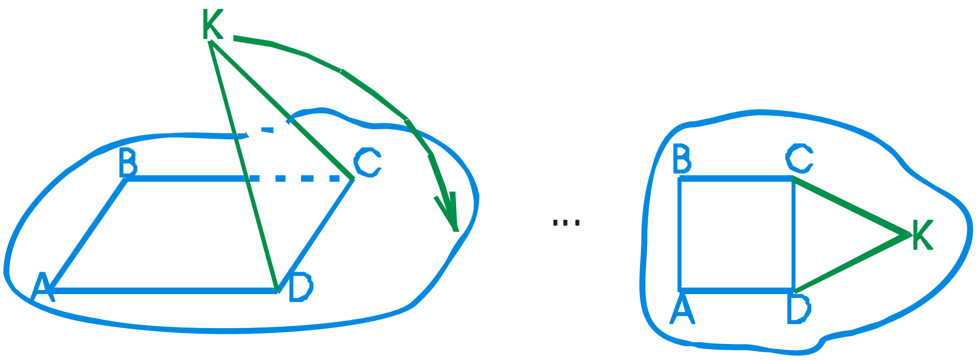


9. zīm.

Konstruēt: <(ABCD;CDK)

Konstrukcijas gaita un pamatojums:

1) Plakņu šķēluma taisne ir CD.
2) Lai vieglāk būtu atrast „pareizo" punktu uz šķēluma taisnes, un novilkt perpendikulus, abus daudzstūrus var „izklāt" vienā plaknē. Tad mēs redzam šīs figūras patiesā izskatā, tādēļ var racionālāk atrast divplakņu kakta leņķa virsotni (punktu uz šķēluma taisnes, 10. zīm.)



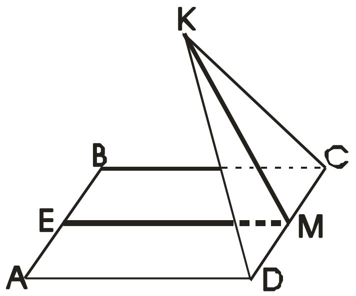
10. zīm.

Ja vienā daudzstūrī (DKC) pret šķēluma taisni (CD) ir novilkts perpendikuls (KM), atrasts perpendikula pamats - punkts uz šķēluma taisnes M, tad var vieglāk izpētīt, kā būs novietots otrs perpendikuls (EM)(11.zīm).

11. zīm.

Tā kā KD=KC, tad trijstūris DKC ir vienādsānu un augstums pret pamatu DC ir arī mediāna. Tāpēc atrodam DC viduspunktu M un novelkam augstumu KM. Aplūkojam punktu M attiecībā pret kvadrātu ABCD. No punkta M ir jāvelk perpendikuls ME pret CD. Skaidrs, ka EM $\parallel$ AD. Tātad EM $\perp$ CD, KM $\perp$ CD (11. zīm.).

3) Divplakņu kakta leņķis ir KME (12. zīm.).

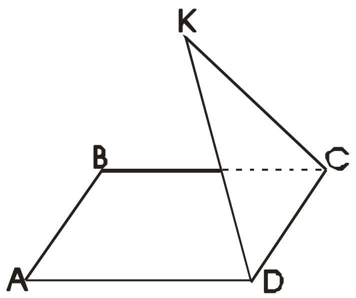


12. zīm.

2. Dots: ABCD – rombs, < BAD = 60^0, DCK – trijstūris, KD=KC (13.zīm.).

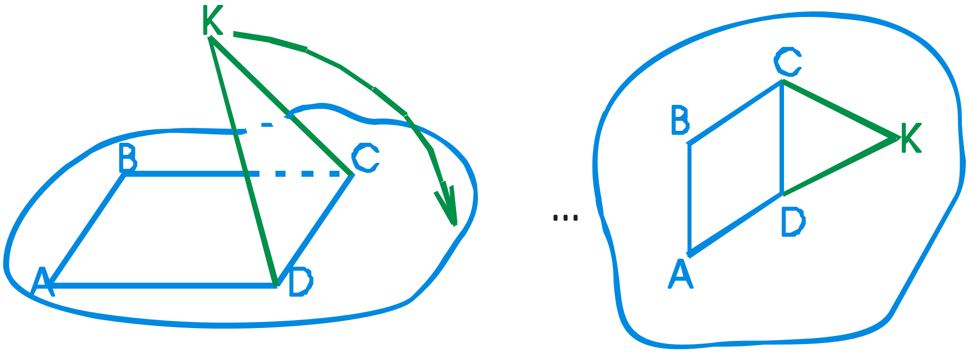
Konstruēt: <(ABCD;CDK)

Konstrukcijas gaita un pamatojums:



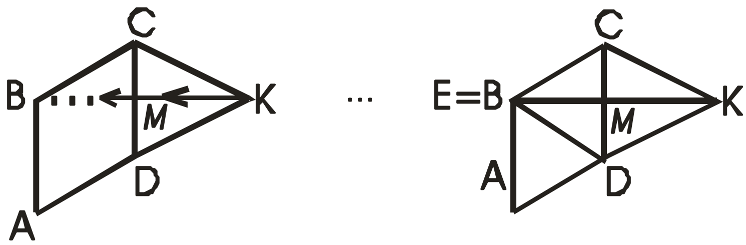
13. zīm.

Lai arī uzdevuma nosacījumi šajā piemērā atšķiras no iepriekšējā 1. piemēra, tomēr zīmējumi abos gadījumos ir vienādi. Atšķirību ieraudzīsim, kad abus daudzstūrus izklāsim vienā plaknē (14. zīm.):



14. zīm.

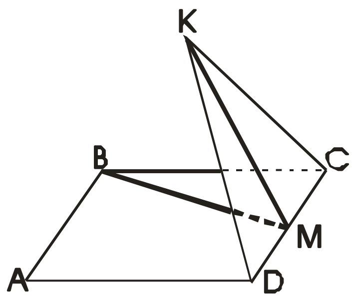
Ja vienā daudzstūrī (DKC) pret šķēluma taisni (CD) ir novilkts perpendikuls (KM), atrasts perpendikula pamats - punkts uz šķēluma taisnes M, tad var izpētīt, kā būs novietots otrs perpendikuls (EM)(15.zīm).



15. zīm.

Punkts M tāpat kā iepriekšējā gadījumā ir nogriežņa CD viduspunkts. Tā kā romba < BAD = 60^{0}, tad trijstūris BCD ir regulārs un BM ir reizē mediāna un arī augstums. Šoreiz punkts E sakritīs ar punktu B (5. zīm.).

<(ABCD;CDK) = < BMK (16. zīm.).



16. zīm.

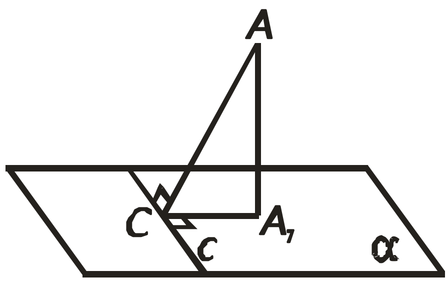
Šo metodi izmanto risinot uzdevumus no darba lapām 2. pielikumā.

2. Metode.

Metode balstīsies uz triju perpendikulu teorēmu. Atcerēsimies to.

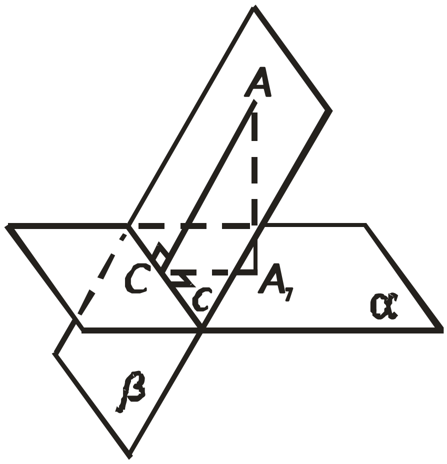
Teorēma (triju perpendikulu teorēma). Ja taisne, kas atrodas plaknē, ir perpendikulāra pret slīpnes projekciju, tad tā ir perpendikulāra arī pret pašu slīpni.

Teorēma (apgrieztā triju perpendikulu teorēma). Ja taisne, kas atrodas plaknē, ir perpendikulāra pret slīpni, tad tā ir perpendikulāra arī pret šīs slīpnes projekciju.



17. zīm.

Caur slīpni AC un taisni c var novilkt plakni β (17. un 18. zīm.).



18. zīm.

Tad, lai atrastu leņķi starp plaknēm α un β, varam izmantot iepriekš aplūkoto 1. metodi: 1) plakņu šķēluma taisne ir c; 2) ja slīpne AC ir perpendikulāra pret taisni c, tad arī tās projekcija A_1C ir perpendikulāra pret taisni c, bet, ja projekcija A_1C ir perpendikulāra pret taisni c, tad arī pati slīpne AC ir perpendikulāra pret taisni c; 3) leņķis starp plaknēm ir ACA_1 (18.zīm).

Lai atrastu leņķi starp divām plaknēm, izmantojot triju perpendikulu teorēmu, rīkosimies sekojoši:

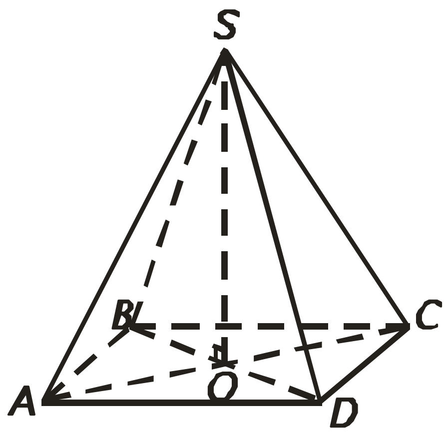
1. ***Atrod plakņu šķēluma taisni.***
2. ***Vienā no plaknēm izvēlas punktu A, no kura var viegli novilkt (vai arī jau ir novilkts) perpendikulu pret otru plakni, atrodot perpendikula pamatu A_1.***
3. ***No punkta A (vai arī no punkta A_1 - atkarībā no tā no kura punkta to var vieglāk novilkt) velk perpendikulu pret šķēluma taisni (slīpne vai slīpnes projekcija), iegūstot punktu C, tad punktu A_1 (vai arī A) savienojot ar punktu C, iegūstam meklēto leņķi starp plaknēm ACA_1 (18.zīm.).***

Šo metodi var izmantot, lai atrastu leņķi starp skaldnēm daudzskaldņos. Šādi uzdevumi ir sagatavoti darba lapās 3. pielikumā.

Aplūkosim piemērus.

Piemēri:

1. Dots: SABCD – piramīda, ABCD – taisnstūris, SO – piramīdas augstums (19. zīm.).

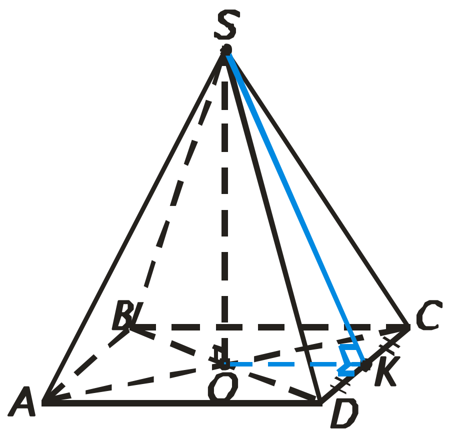


19. zīm.

Konstruēt: < (ABC;DCS)

Konstrukcijas gaita un pamatojums:

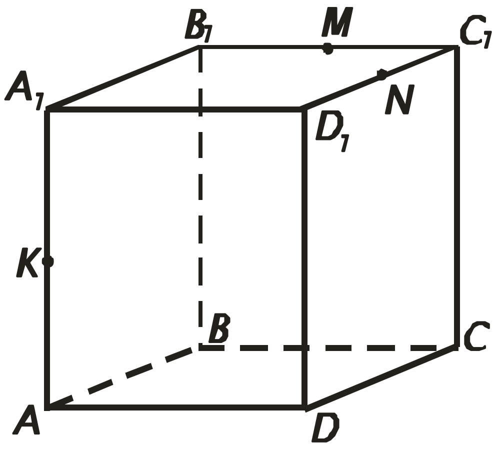
1. Plakņu šķēluma taisne ir CD.
2. Skaldnē DCS atrodam punktu S no kura pret otro skaldni ABC ir novilkts perpendikuls SO. Perpendikula pamats ir O (19.zīm.).
3. No punkta O pret šķēluma taisni CD velkam perpendikulu OK. Tā kā ABCD taisnstūris, tad OC = OD un trijstūris COD ir vienādsānu, bet vienādsānu trijstūrī augstums (perpendikuls OK) ir arī mediāna. Tātad K ir šķautnes CD viduspunkts. Atliek punktu S savienot ar K un iegūstam meklēto leņķi SKO (20.zīm.).



20. zīm.

2. Dots: regulāru četrstūra prizmu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ šķeļ plakne KMN ($K \in AA_1$, $AK = KA_1$, $M \in B_1C_1$, $B_1M = MC_1$, $N \in C_1D_1$, $C_1N = ND_1$). $AB = 4cm$, $AA_1 = 8cm$ (21. zīm.).

Aprēķināt: $<(A_1B_1C_1D_1; KMN)$

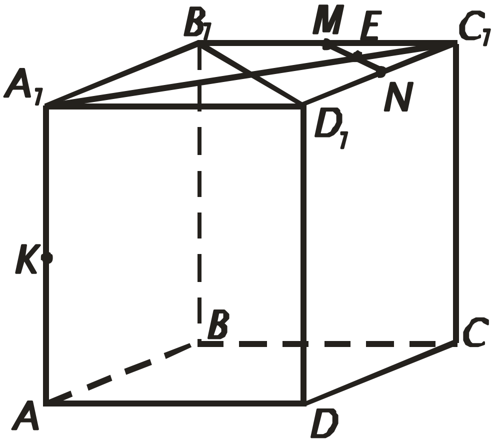


21. zīm.

Risinājums:

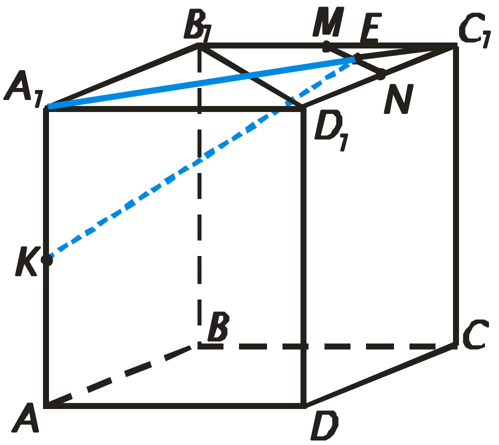
Vispirms vajadzētu konstruēt paralēlskaldņa šķēlumu ar plakni KMN. Taču, ja jāaprēķina tikai leņķis starp norādītajām plaknēm, to var nekonstruēt.

1. Atrod plakņu $A_1B_1C_1D_1 \cap KMN = MN$.
2. Plaknē KMN izvēlas punktu K no kura pret plakni $A_1B_1C_1D_1$ jau ir novilkts perpendikuls KA_1. Perpendikula pamats ir punkts A_1.
3. No perpendikula pamata A_1 pret šķēluma taisni MN konstruēsim perpendikulu. $A_1C_1 \perp B_1D_1$ kā kvadrāta diagonāles, $MN // B_1D_1$ kā trijstūra $B_1C_1D_1$ viduslīnija. Tātad arī $A_1C_1 \perp MN$, $MN \cap A_1C_1 = E$. un $A_1E \perp MN$ (22. zīm.).



22. zīm.

Tad KE – slīpne, A_1E - projekcija, pēc triju perpendikulu teorēmas, ja $A_1E \perp MN$, tad arī $KE \perp MN$ un $<(A_1B_1C_1D_1; KMN) = < A_1EK$ (23. zīm.)



23. zīm.

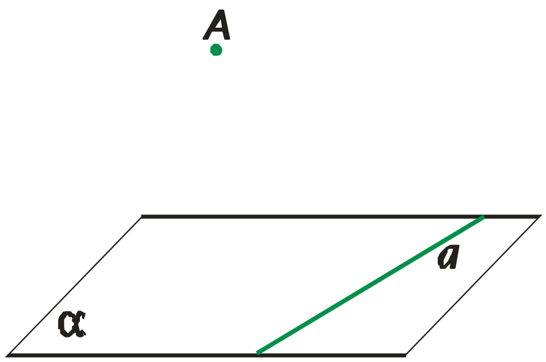
Lai aprēķinātu $< A_1EK$, iesaistīsim to taisnleņķa trijstūrī A_1EA. $A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^{\ 2} + B_1C_1} = 4 \cdot \sqrt{2}$, $A_1E = 3 \cdot \sqrt{2}$ (MN ir trijstūra $B_1C_1D_1$ viduslīnija un kvadrāta diagonāles krustpunktā dalās uz pusēm), $KA_1 = \frac{1}{2} \cdot AA_1 = 4cm.$ Trijstūrī A_1EK $tg < A_1EK = \frac{A_1K}{A_1E} = \frac{4}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$. $< A_1EK = arctg \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$.

6.Piemērs.

Attālums no punkta līdz taisnei

Stereometrijā attālumu no punkta līdz taisnei nosaka tāpat kā planimetrijā – tas ir vienāds ar atbilstošā perpendikula garumu. Bet, ja punkts atrodas telpā, taisne – plaknē, tad nemaz nav tik viegli no šī punkta pret taisni novilkt perpendikulu. Ir jāzina metode kā to darīt.

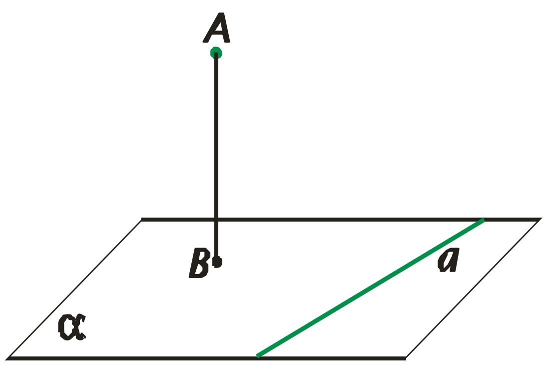
Pieņemsim, ka plaknē α ir dota taisne a, bet telpā punkts A. Ja plakne α nav dota, tad caur taisni a to novilksim. (24. zīm.)



24. zīm.

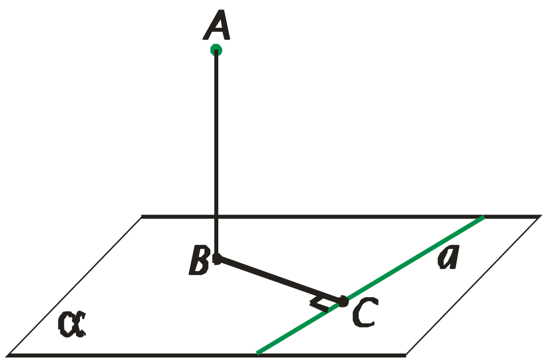
Tad, lai atrastu attālumu no punkta A līdz taisnei a, varam rīkoties sekojoši:

1. Atradīsim punkta A projekciju plaknē α. Tas ir punkts B. (25. zīm.)



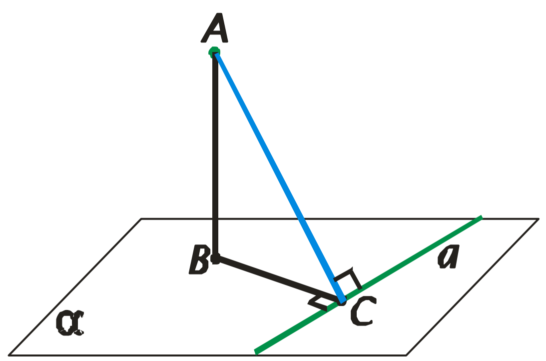
25 .zīm.

2. Plaknē α no punkta B pret taisni a jāvelk perpendikuls BC (plaknē novilkt perpendikulu ir vienkāršāk – tas varētu būt kāda trijstūra augstums, kvadrāta mala ...utt.)(26. zīm.).



26. zīm.

3. Savienojot punktus A un C, iegūstam slīpni AC, kuras projekcija ir BC$\perp a$. Pēc triju perpendikulu teorēmas arī atbilstošā slīpne AC$\perp a$. (27.zīm.)



27. zīm.

Tātad AC nogriežņa garums arī ir attālums no punkta A līdz taisnei a. Lai aprēķinātu attālumu – to var „iesaistīt" taisnleņķa trijstūrī, kura malas ir atbilstošā slīpne (attālums AC), projekcija (BC) un perpendikuls (AB) (27.zīm.). Svarīgi nesajaukt šajā trijstūrī kateti ar hipotenūzu, jo leņķi projekcijā nesaglabājas. Jāatceras, ka slīpne šādā trijstūrī vienmēr būs hipotenūza.

Skolēni kārtējo reizi var arī pārliecināties par triju perpendikulu teorēmas svarīgumu stereometrijā un nostiprināt izpratni par to.

Piemēri:

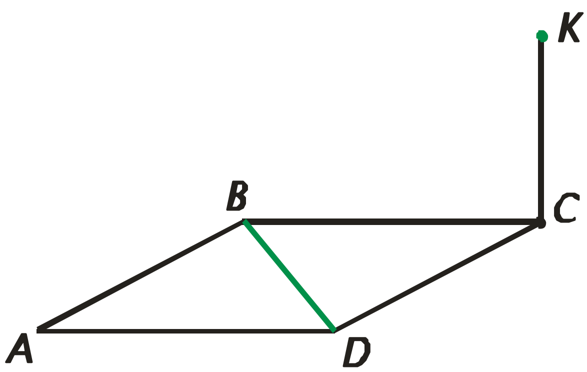
1. **Dots**: ABCD – rombs, <BCD = 60^0, CK $\perp$ABCD.

Konstruēt: a) nogriezni, kurš nosaka attālumu no punkta K un taisnei BD;

b) nogriezni, kurš nosaka attālumu no punkta K un taisnei AB;

a) **Konstrukcijas gaita**:

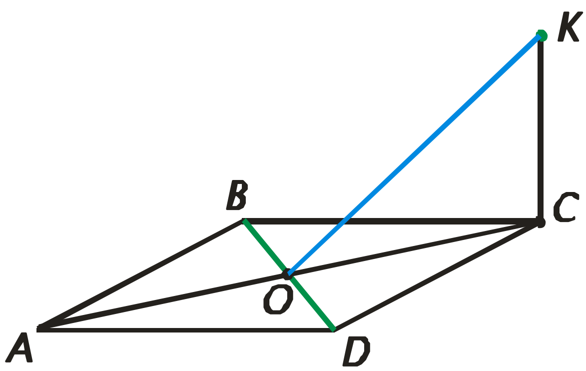
1) Punkta K projekcija plaknē ABCD ir punkts C (28.zīm.).



28. zīm.

2) CO $\perp$ BD (kā romba diagonāles);

3) KO $\perp$ BD pēc triju perpendikulu teorēmas. KO – attālums no punkta K līdz taisnei BD (29. zīm.).

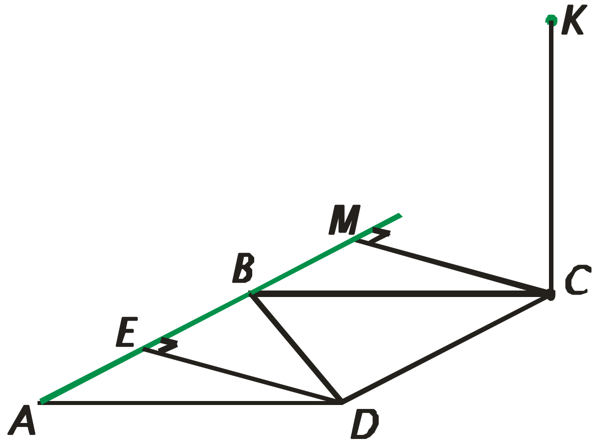


29. zīm.

b) **Konstrukcijas gaita**:

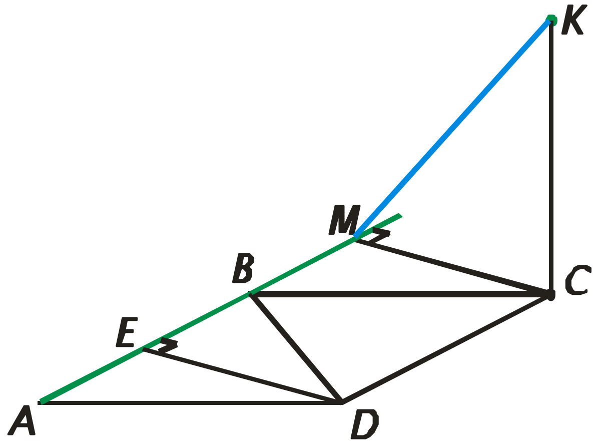
1) Punkta K projekcija plaknē ABCD ir punkts C (30.zīm.).

2) Lai no punkta C pret taisni AB novilktu perpendikulu, jākonstruē jebkura taisne t, kura ir perpendikulāra pret taisni AB. Tad caur punktu C jānovelk taisne, kas paralēla ar taisni t. Tā kā <BCD = 60^0, tad trijstūris ABD ir regulārs un regulārā trijstūrī mediāna sakrīt ar augstumu. Tāpēc atradīsim AB viduspunktu E un savienosim to ar virsotni D, iegūstot DE $\perp$ AB (šeit DE ir taisne t). Pagarināsim romba malu AB. Konstruēsim CM // DE. (30. zīm.)



30. zīm.

3) KM ⊥ AB pēc triju perpendikulu teorēmas. KM – attālums no punkta K līdz taisnei AB (31. zīm.).



31. zīm.

2. **Dots**: trapece ABCD, AB = CD, AK ⊥ ABC.

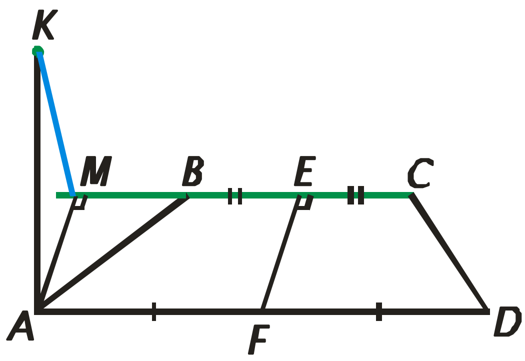
Konstruēt: nogriezni, kurš nosaka attālumu no punkta K līdz taisnei BC.

Konstrukcijas gaita:

1) Punkta K projekcija ir punkts A.

2) Uzreiz nevaram konstruēt perpendikulu no punkta A pret taisni BC. Tāpēc konstruēsim kādu citu taisni perpendikulāru BC. Konstruēsim trapeces pamatu AD un BC viduspunktus F un E. Tā kā trapece ABCD ir vienādsānu, tad EF ⊥ BC. Konstruē AM // FE, tad arī AM ⊥ BC.

3) KM $\perp$ BC pēc triju perpendikulu teorēmas. KM – attālums no punkta K līdz taisnei BC (32. zīm.).



32. zīm.

Skolēnam ir interesantāk risināt uzdevumus, kad viņš zina, kas jāzina. Viņam ir cerība tikt galā ar problēmām, ieguldot savu radošumu. Bērnam nepatiks spēlēt spēli, kurā viņš nezina visus noteikumus (skolēnam nepatiks risināt uzdevumus, ja nezinās visu teoriju), jo vienmēr var gadīties situācija, kad noteikumu nezināšana spēles iznākumu var novest strupceļā (jo vienmēr var gadīties situācija, kad likuma nezināšana neļauj atrisināt uzdevumu, lai arī cik radošs es būtu). Skolēns jūtas drošāk, kad redz to faktu apjomu, kas viņam jāzina , lai apgūtu to vai citu tēmu. Uzskatu, ka teorijas nezināšana kavē radošuma attīstīšanu skolēnos. Zinot visus likumus, ir interesanti, brīvi risināt uzdevumus. Matemātika var kļūt aizraujoša – varam brīvi izpausties savā uzdevumu risināšanā.

Konspektu veidošana un radoša uzdevumu risināšana attīsta arī pētnieciskās darbības prasmes.

Uzskatu, ka īpaša uzmanība jāpievērš radošai teorijas apgūšanai, jo zināšanas nodrošina skolēniem komfortablu sajūtu matemātikā.